Capítulo 2

Sistemas lineales

2.1 Problemas que conducen a la solución de un sistema lineal.

2.1.1 Van der Monde

El problema de la interpolación polinómica conduce a la resolución de un sistema lineal cuya matriz de coeficicientes formada por las potencias de los nodos de interpolación es fue investigada por Alexandre Vandermonde (1735-1796).

Van der Monde fue un virtuoso violinista en su juventud, interesado tardíamente por las ciencias si bien presentó a la Academia de Ciencias cuatro trabajos matemáticos entre 1771 y 1772 considerados como la base de la teoría de los determinantes.

Sin embargo su campo de interés fue mucho más amplio, investigó con Lavoisier y Bezout los efectos de las bajas temperaturas, motivado por el devastador invierno de 1776. Con Monge y Bertholet investigó la fabricación del acero, experimentando con distintas mezclas de hierro y carbono con el propósito de mejorar la calidad de las bayonetas del ejército francés. Curiosamente su obra "Sistema de armonía aplicable al estado actual de la música" presentada a la Academia de Ciencias Francesa, lejos de ser una teoría matemática de la misma, propugna que la música debe alejarse de todo comportamiento y análisis matemático y que deben ser únicamente las sensaciones auditivas las que juzguen su calidad.

2.1.2 Ejercicio. Interpolación polinómica.

- **Probar que dado un conjunto de observaciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ encontrar un polinomio**
$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{2.1}$$
que verifique
$$p(x_i) = y_i \tag{2.2}$$
es equivalente a la resolución de un sistema lineal con matriz de coeficientes la matriz de Vander Monde
$$A_{ij} = x_i^j \tag{2.3}$$

2.1.3 Ejercicio. Mínimos cuadrados.

- **Probar que dado un conjunto de observaciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$ encontrar un polinomio**
$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{2.4}$$
con $n < m$ que haga mínimo
$$\sum_{i=0}^{m} (p(x_i) - y_i)^2 \tag{2.5}$$
es equivalente a la resolución de un sistema lineal.

- **Solucion**: En general el problema de mínimos cuadrados consiste en minimizar la función
$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=0}^{m} (p(x_i) - y_i)^2 \tag{2.6}$$
para ello consideramos el sistema
$$\left.\frac{\partial f}{\partial a_j} = 0\right\}_{j=0}^{n}$$
en el caso que nos ocupa
$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{m} 2(p(x_i) - y_i)\frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = 0 \tag{2.7}$$
que teniendo en cuenta que
$$\frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = \frac{\partial(a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n)}{\partial a_j} = x_i^j \tag{2.8}$$
por lo que
$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{m} 2(p(x_i) - y_i)x_i^j = 0 \tag{2.9}$$

- Simplificando el factor 2 el sistema de ecuaciones queda entonces de la forma

$$\left.\left(\sum_{i=0}^{m} x_i^j\right) a_o + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^{j+1}\right) a_1 + ... + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^{j+n}\right) a_n = \sum_{i=0}^{m} y_i x_i^j \right\}_{j=0}^{n}$$

que en forma matricial podemos poner como

$$\begin{pmatrix} m+1 & (\sum_{i=0}^m x_i) & (\sum_{i=0}^m x_i^2) & ... & (\sum_{i=0}^m x_i^n) \\ (\sum_{i=0}^m x_i) & (\sum_{i=0}^m x_i^2) & (\sum_{i=0}^m x_i^3) & ... & (\sum_{i=0}^m x_i^{n+1}) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ (\sum_{i=0}^m x_i^n) & (\sum_{i=0}^m x_i^{n+1}) & (\sum_{i=0}^m x_i^{n+2}) & ... & (\sum_{i=0}^m x_i^{2n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m y_i \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i \\ ... \\ \sum_{i=0}^m y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

- En una forma matricial más compacta este resultado puede expresarse considerando la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x_o & x_o^2 & ... & x_o^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_m & x_m^2 & ... & x_m^n \end{pmatrix}$$

el sistema anterior puede ponerse de la forma

$$G^T G a = G^T y \tag{2.10}$$

donde a representa el vector de coeficientes a_i e y el vector de ordenadas y_i.

- En general el método de mínimos cuadrados puede generalizarse de forma simple a una función no necesariamente polinómica pero que es combinación lineal de funciones conocidas

$$\phi(x) = a_o\phi_o(x) + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + ... + a_n\phi_n(x)$$

(el caso polinómico es un caso particular cuando $\phi_j(x) = x^j$) resultando en este caso la matriz

$$G = \begin{pmatrix} \phi_o(x_o) & \phi_1(x_o) & \phi_2(x_o) & ... & \phi_n(x_o) \\ \phi_o(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & ... & \phi_n(x_1) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \phi_o(x_m) & \phi_1(x_m) & \phi_2(x_m) & ... & \phi_n(x_m) \end{pmatrix}$$

y la solución del problema de mínimos cuadrados la solución del sistema (2.10)

2.1.4 Ejercicio. Discretización.

- **Una derivada segunda puede aproximarse de la forma**

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{2h} \tag{2.11}$$

Probar que la solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) = c$$

con las condiciones de contorno $y(0) = a$, $y(1) = b$ utilizando la aproximación (2.11) conduce a la solución de un sistema lineal.

(Sugerencia: considerar el intervalo [0,1] dividido en un conjunto de subintervalos de longitud h y plantear la ecuación en cada extremo de dichos subintervalos)

2.2 El método de Jacobi.

El método de Jacobi es introducido en 1845 por Carl Gustav Jacobi (1804-1851), quien hizo ver que si un conjunto de n funciones con n variables son funcionalmente dependientes el determinante de la matriz que hoy lleva su nombre (jacobiano) es cero. Una buena parte de su acercamiento a los sistemas lineales proviene del estudio de sistemas físicos sometidos a pequeñas oscilaciones, para los cuales, eligiendo una adecuada representación de ejes, los términos que aparecen en la diagonal son dominantes respecto del resto. Jacobi repara en que éste es también el caso en muchos problemas de mínimos cuadrados ya que los términos diagonales corresponden a suma de cuadrados que son todos positivos mientras que los no diagonales corresponden a sumas de términos positivos y negativos que pueden cancelarse entre si.

Figura˜2.1: Carl Gustav Jacobi (1804-1851), mantuvo intensa correspondencia con Gauss, Legendre, Abel, Bessel, Alexander Von Humboldt y la mayoría de matemáticos de su época

---

2.2.1 Ejercicio

- **Probar que si denotamos**

$$\bar{r}^{(k)} = D^{-1} r^{(k)}$$

donde D es la matriz diagonal de A y $r^{(k)}$ es el residuo

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

El método de Jacobi para la resolución iterativa de sistemas lineales de la forma

$$Ax = b$$

podemos escribirlo como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \bar{r}^{(k)}$$

Resolver mediante esta técnica el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

- Solución: En efecto, el método de Jacobi se basa en desarrollar el esquema iterativo

$$Dx^{(k+1)} = (D - A)x^{(k)} + b \tag{2.13}$$

o de forma alternativa

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(D - A)x^{(k)} + D^{-1}b \tag{2.14}$$

que podemos reescribir como

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}Ax^{(k)} + D^{-1}b$$

Si denotamos $\bar{r}^{(k)} = D^{-1}r^{(k)}$ al residuo de la iteración k-ésima.

$$D^{-1}r^{(k)} = D^{-1}b - D^{-1}Ax^{(k)} \tag{2.15}$$

reagrupando términos observamos que el método se escribe de la forma

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \bar{r}^{(k)}$$

- Escribamos el sistema en la forma $D^{-1}Ax^{(k)} = D^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

- Tomemos $x^{(0)}$ la solución diagonal

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

en este caso tenemos

$$r^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

con lo que

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

lo que nos da un residuo

$$\bar{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{7}{64} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

y una segunda iteración

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{7}{64} \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{49}{64} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

y un segundo residuo

$$\bar{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{49}{64} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{128} \\ -\frac{21}{64} \\ -\frac{63}{256} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

La tercera iteración

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{49}{64} \\ \frac{35}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{21}{128} \\ -\frac{21}{64} \\ -\frac{63}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{128} \\ -\frac{35}{32} \\ \frac{497}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.16406 \\ -1.0938 \\ 1.9414 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

y el tercer residuo

$$\bar{r}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{21}{128} \\ -\frac{35}{32} \\ \frac{497}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{231}{1024} \\ \frac{21}{128} \\ \frac{21}{128} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

conduce a la cuarta iteración

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{128} \\ -\frac{35}{32} \\ \frac{497}{256} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{231}{1024} \\ \frac{21}{128} \\ \frac{21}{128} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{63}{1024} \\ -\frac{119}{128} \\ \frac{539}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.1523 \times 10^{-2} \\ -0.92969 \\ 2.1055 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

y al cuarto residuo

$$\bar{r}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{63}{1024} \\ -\frac{119}{128} \\ \frac{539}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{63}{512} \\ -\frac{567}{4096} \\ -\frac{315}{2048} \end{pmatrix}$$

que conduce a la quinta iteración

$$x^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{63}{1024} \\ -\frac{119}{128} \\ \frac{539}{256} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{63}{512} \\ -\frac{567}{4096} \\ -\frac{315}{2048} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{63}{1024} \\ -\frac{4375}{4096} \\ \frac{3997}{2048} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.1523 \times 10^{-2} \\ -1.0681 \\ 1.9517 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

que observamos va convergiendo a la solución del sistema

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

2.3 El método de Gauss Seidel.

El método de Gauss-Seidel se denomina así en honor a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Philipp von Seidel (1821-1896), Físico y Matemático alemán que al igual que Gauss supo combinar el desarrollo de la matemática y la Física al más alto nivel. Sus tesis "Über die beste Form der Spiegel in Teleskopen" y "Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche" constituyeron obras de referencia en el campo de la astronomía y la matemática fundamental.

Gauss propuso este método para resolver las ecuaciones provenientes de la aplicación de la técnica de mínimos cuadrados a las medidas cartográficas cuando entre 1829 y 1825 se encontraba encargado de cartografiar el condado de Hannover. (Como consecuencia de este trabajo Gauss desarrollaría buena parte de la geometría diferencial conocida actualmente).

Seidel propuso el mismo de forma independiente a Gauss cuando pretendía resolver un sistema de ecuaciones con 72 incógnitas en un estudio de la luminosidad de las estrellas. Su inspiración fué el método desarrollado por su maestro Jacobi, combinado con el método de eliminación de Gauss.

2.3.1 Ejercicio

- **Resolver mediante el método de Gauss Seidel y utilizando aritmética racional las dos primeras iteraciones del sistema**

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Solución:** En general el algoritmo de Gauss Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \tag{2.25}$$

conduce a calcular en este caso particular

$$x_1^{(k+1)} = \frac{2 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{4} \tag{2.26}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-3 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)}}{4} \tag{2.27}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1 - 2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{4} \tag{2.28}$$

Tomamos como condición inicial la solución del sistema diagonal

- $x_1^{(o)} = \frac{1}{2}; \qquad x_2^{(o)} = \frac{-3}{4}; \qquad x_3^{(o)} = \frac{1}{4}$
- En el caso que nos ocupa obtenemos para la primera iteración
- $x_1^{(1)} = \frac{2-2x_2^{(0)}-x_3^{(0)}}{4} = \frac{2-2\left(\frac{-3}{4}\right)-\frac{1}{4}}{4} = \frac{13}{16}$
- $x_2^{(1)} = \frac{-3-x_1^{(1)}-2x_3^{(0)}}{4} = \frac{-3-\frac{13}{16}-2(\frac{1}{4})}{4} = -\frac{69}{64}$
- $x_3^{(1)} = \frac{1-2x_1^{(1)}-x_2^{(1)}}{4} = \frac{1-2\left(\frac{13}{16}\right)-\left(-\frac{69}{64}\right)}{4} = \frac{29}{256}$

y para la segunda iteración

- $x_1^{(2)} = \frac{2-2x_2^{(1)}-x_3^{(1)}}{4} = \frac{2-2\left(-\frac{69}{64}\right)-\frac{29}{256}}{4} = \frac{1035}{1024} = 1.0107$
- $x_2^{(2)} = \frac{-3-x_1^{(2)}-2x_3^{(1)}}{4} = \frac{-3-\frac{1035}{1024}-2(\frac{29}{256})}{4} = -\frac{4339}{4096} = -1.0593$
- $x_3^{(1)} = \frac{1-2x_1^{(2)}-x_2^{(2)}}{4} = \frac{1-2\left(\frac{1035}{1024}\right)-\left(-\frac{4339}{4096}\right)}{4} = \frac{155}{16384} = 0.0094$

que converge a la solución del sistema $x_1 = 1; \qquad x_2 = -1; \qquad x_3 = 0$

2.4 Método de Factorización de Gauss.

2.4.1 Ejercicio

- **Considérese el sistema lineal**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Haciendo uso de la factorización de Gauss. Obtener la factorización LU y resolver el sistema utilizando dicha factorización.

- **Solución**: en efecto, en la matriz A

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Realizamos

$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{3}$
2 fila - $\frac{1}{3}$ $\times$1 fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{3}$
3 fila - $\frac{2}{3}$1 fila

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

- Obtenemos como primer paso de la eliminacion

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

- Hacemos ahora

l$_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = -\frac{1}{7}$
3 fila - $\left(-\frac{1}{7}\right) \times$ 2 fila

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

- La factorización queda pues de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix}$$

- Para resolver el sistema hacemos $Lc = b$ resolviendo para el vector c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$c_1 = 1$
$\frac{1}{3}c_1 + c_2 = -2 \Rightarrow c_2 = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$
$\frac{2}{3}c_1 - \frac{1}{7}c_2 + c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{7}\left(-\frac{7}{3}\right) = 0$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Por lo tanto resolvemos el sistema original planteando $Ux = c$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

  cuya solución es:

$$\frac{18}{7}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$
$$\frac{7}{3}x_2 + \frac{18}{7}x_3 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{7}(-\frac{7}{3}) = -1$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 3x_1 = \frac{1}{3}(1 - 2(-1)) = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Como comprobación observamos que

  - LU=A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ax=b

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Andre Luis Cholesky

Andre Luis Cholesky (1875-1918) fue un oficial del ejercito francés que desarrolló intensos trabajos de cartografía, principalmente en el norte de Africa y Creta y que diseñó un método para resolver las ecuaciones lineales provenientes de los problemas de mínimos cuadrados habituales en cartografía, aprovechando la forma simétrica (y definida positiva de la matriz de coeficientes) probando que la matriz A se puede factorizar como el producto de dos matrices traspuestas. Cholesky murió en el campo de batalla durante la primera guerra mundial y su método fue publicado por uno de sus ayudantes, el comandante Benoit en el Bulletin geodesique 2 (1923) 67-77. El metodo recibió poca atención en los años siguientes, pero cobró actualidad con la llegada de la computación a gran escala a partir de 1945.

Figura˜2.2: Andre Louis Cholesky (1875-1918)

2.5.1 Ejercicio

- **Probar que si la matriz A es factorizable en la forma**

$$A = LU \tag{2.30}$$

con L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior los elementos de éstas están dados por las relaciones

$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pk} \tag{2.31}$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}u_{pj}\right) \qquad j > k \tag{2.32}$$

$$l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip}u_{pk}\right) \qquad i > k \tag{2.33}$$

- **Probar que si la matriz A es factorizable y simétrica es posible encontra una factorización en la que**

$$u_{ij} = l_{ji} \tag{2.34}$$

es decir que las matrices L y U son traspuestas una de la otra y por tanto

$$A = LL^T \tag{2.35}$$

2.6 Sistemas no lineales

2.6.1 Ejercicio

- **Considérese el sistema no lineal**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$2x^2 + y^2 - 4z = 0$$

$$3x^2 - 4y + z^2 = 0$$

Resolver dicho sistema utilizando el método de Newton simplificado, tomando como condición inicial $x^{(o)} = \frac{1}{2}, y^{(o)} = \frac{1}{2}$,$z^{(o)} = \frac{1}{2}$. (Resolver las dos primeras iteraciones y utilizar una estrategia para minimizar el número de operaciones realizadas).

2.6.2 Ejercicio

- **Gauss desarrolló una forma de realizar integrales numéricas basadas en la utilización de fórmulas con parámetros a determinar para los cuales se impone que la integral sea exacta en los polinomios de grado lo más alto posible. Esto da lugar a un sistema no lineal de la forma:**

$$\begin{array}{lcll} \omega_o & + & \omega_1 & = & 2 \\ \omega_o x_o & + & \omega_1 x_1 & = & 0 \\ \omega_o x_o^2 & + & \omega_1 x_1^2 & = & \frac{2}{3} \\ \omega_o x_o^3 & + & \omega_1 x_1^3 & = & 0 \end{array}$$

Plantear la resolución de dicho sistema con el método generalizado de Newton.
