Capítulo 1

Resolución de ecuaciones.

1.1 La ley del desplazamiento de Wien

Según Planck la distribución espectral de la energía emitida (calor radiado) por unidad de tiempo y superficie por un cuerpo negro está dada por

$$R_\lambda = 2\pi hc^2 \frac{1}{\lambda^5(\exp\frac{hc}{\lambda KT} - 1)} \tag{1.1}$$

donde λ es la longitud de onda y T la temperatura termodinámica, y donde las constantes h, K, c son la constante de Planck, la constante de Boltzmann y la velocidad de la luz en el vacío respectivamente.

El máximo de la densidad espectral puede calcularse resolviendo la ecuación $\frac{dR}{d\lambda} = 0$, sin embargo resulta más simple calcular el mínimo del denominador resolviendo

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda^5(\exp\frac{hc}{\lambda KT} - 1)) \tag{1.2}$$

Figura~1.1: Wilhem Wien (1864-1928)

que conduce a

$$1 - e^{-\frac{hc}{\lambda KT}} = \frac{1}{5}\frac{hc}{\lambda KT} \tag{1.3}$$

que haciendo el cambio $x = \frac{hc}{\lambda KT}$ **nos lleva a la ecuación**

$$5(1 - e^{-x}) = x \tag{1.4}$$

1.1.1 Ejercicio

- **Resolver dicha ecuación mediante el método de iteración de un punto y analizar su convergencia.**

- **Solución:**
- Esta es una ecuación del tipo $x = g(x)$ por lo que analizaremos $g'(x)$,

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(5(1 - e^{-x})) = 5e^{-x}$$

  la condición

$$|g'(x)| < 1 \tag{1.5}$$

  se satisface para

$$-1 < 5e^{-x} < 1$$

  es decir

$$e^{-x} < \frac{1}{5} \tag{1.6}$$

  de donde

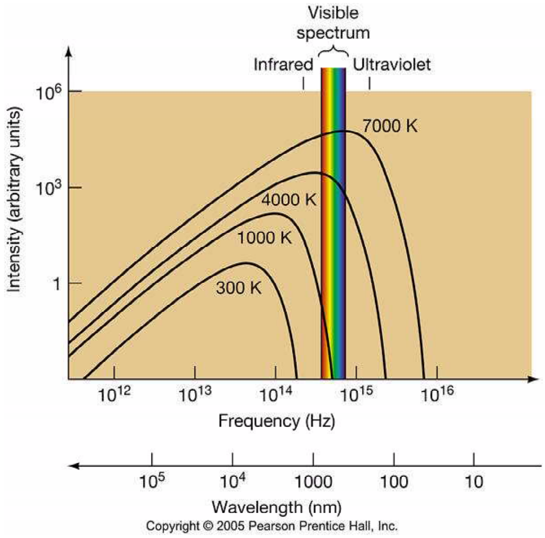
$$-x < -\ln 5 \tag{1.7}$$

  o lo que es lo mismo

$$x > \ln 5 = 1.6094 \tag{1.8}$$

- Además la función $g(x)$ es una función acotada en el intervalo $[\ln 5, N]$ entre los valores $[4, 5]$ por lo que aplica a cualquier intervalo intervalo $[\ln 5, N]$ con N>5 en si mismo, y por tanto verifica las condiciones del teorema del punto fijo.

- Supongamos $x^{(0)} = 2$ y tomamos,
  - $x^{(1)} = 5(1 - e^{-2}) = 4.3233$
  - $x^{(2)} = 5(1 - e^{-4.3233}) = 4.9337$
  - $x^{(3)} = 5(1 - e^{-4.9337}) = 4.964$
  - $x^{(4)} = 5(1 - e^{-4.964}) = 4.9651$
  - $x^{(5)} = 5(1 - e^{-4.9651}) = 4.9651$



Figura~1.2: Ilustración de la ley del desplazamiento de Wien

- Por tanto el máximo de la distribución espectral según la ley de Planck verifica:

$$4.\,9651 = \frac{hc}{\lambda_{\max} KT} \tag{1.9}$$

que suele escribirse de la forma

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.\,9651K}\frac{1}{T} \tag{1.10}$$

es decir el máximo de la distribución espectral es inversamente proporcional a la temperatura.

1.1.2 Ejercicio adicional

- **Se propone como ejercicio adicional calcular dicho máximo para los casos de la temperatura media en la superficie terrestre T=15^{o}C y la temperatura aproximada de la superficie del sol T=6000K. y analizar cuál es la mínima temperatura para que dicho máximo caiga en la región del visible.**

1.2 La ecuación de Kepler

La ecuación de Kepler es uno de los primeros ejemplos en los que fue utilizado de manera consciente el método de iteración de un punto. El problema básico es obtener la posición de un planeta en su órbita elíptica alrededor del sol en términos del ángulo ν que forma el radio vector que une el planeta con el sol con el eje mayor de la elipse tomando como cero el punto de máxima aproximación al sol. Es decir las coordenadas polares del planeta tomando como origen el sol.

Figura~1.3: Johannes Kepler (1571-1630)

Sin embargo en lugar de este ángulo denominado anomalía verdadera ν es más sencillo parametrizar la elipse utilizando una variable auxiliar denominada anomalía excéntrica E relacionada con éste de la forma (para ver la interpretación de ete parámetro ver apéndice la elipse en astronomía).

$$\tan(\frac{\nu}{2}) = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{1.11}$$

donde ε es la excentricidad de la elipse.

La anomalía excéntrica E se relaciona con el tiempo t transcurrido desde que el planeta pasó por su punto más cercano al sol (perihelio) a través de la ecuación de Kepler

$$E = M + \varepsilon \sin E \tag{1.12}$$

donde al término

$$M = \frac{2\pi t}{T} \tag{1.13}$$

siendo T el periodo de revolución del planeta se le denomina anomalía media y corresponde al ángulo recorrido por un planeta que siguiera un movimiento circular uniforme respecto del centro de la elipse de periodo T .

1.2.1 Ejercicio

- **Analizar la convergencia de la ecuación de Kepler.**

- **Particularizar al planeta Tierra y encontrar la posición en la que se encuentra actualmente. La Tierra pasó por su perihelio el 4 de Enero. (Excentricidad de la órbita terrestre ε =0.017)**

1.3 Secuencias infinitas

Existe un gran número de límites definidos como una secuencia reiterativa de una misma operación, muchos de ellos han constituido elementos básicos de cálculo en la historia de las matemáticas. Algunos de esos ejemplos pueden analizarse de forma simple utilizando el método de iteración de un punto.

1.3.1 Ejercicio

- **Dada la secuencia**

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....}}} \tag{1.14}$$

probar su convergencia y obtener el valor del límite.

- **Solución:** En efecto, consideremos la sucesión $x^{(0)} = \sqrt{2}$, $x^{(1)} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x^{(2)} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ que tiene el límite anterior y que obedece al criterio

$$x^{(k+1)} = \sqrt{2+x^{(k)}} \tag{1.15}$$

y por tanto corresponde a la solución mediante el método de iteración de un punto de la ecuación

$$x = \sqrt{2+x} \tag{1.16}$$

o lo que es lo mismo

$$x^2 - x - 2 = 0 \tag{1.17}$$

cuyas soluciones son $\{x_o = 2\}, \{x_1 = -1\}$ por lo que el límite al ser positivo debe converger al valor

$$x_o = 2 \tag{1.18}$$

- Para probar la convergencia analicemos la función $g(x)$ en el esquema $x = g(x)$, en este caso

$$g(x) = \sqrt{2+x} \tag{1.19}$$

cuya derivada

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(2+x)}} \tag{1.20}$$

La desigualdad $|g'(x)| < 1$ nos lleva a resolver

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{(2+x)}} \right| < 1 \tag{1.21}$$

o sea

$$-1 < \frac{1}{2\sqrt{(2+x)}} < 1 \tag{1.22}$$

La desigualdad

$$-1 < \frac{1}{2\sqrt{(2+x)}} \tag{1.23}$$

se verifica para todo valor de $x > -2$ ya que la expresión es positiva.

- La desigualdad

$$\frac{1}{2\sqrt{(2+x)}} < 1 \tag{1.24}$$

implica

$$\frac{1}{\sqrt{(2+x)}} < 2 \Rightarrow \frac{1}{(2+x)} < 4 \Rightarrow 1 < 4x + 8 \Rightarrow -\frac{7}{4} < x$$

por lo tanto $|g'(x)| < 1$ en el intervalo $(-\frac{7}{4}, \infty)$

- Sin embargo para garantizar la convergencia necesitamos que tanto la condición inical como la solución estén contenidas en un intervalo cerrado que se aplique en si mismo. $g[a, b] \subset [a, b]$

  Observamos que la función $g(x)$ es una función creciente que si $x > 0$ verifica $g(x) = \sqrt{(2+x)} < x$,por lo tanto aplicará en si mismo a cualquier intervalo cerrado de la forma $[0, x]$, por lo que podemos tomar la condición inicial en el intervalo $[0, \infty)$.

- Como en el lı́mite propuesto la condición inicial es $x^{(o)} = \sqrt{2}$, podemos asegurar que la convergencia está garantizada.

- Numéricamente

k	$x^{(k)}$
0	$\sqrt{2} = 1.4142$
1	$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.8478$
2	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 1.9616$
3	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 1.9904$
4	$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 1.9976.....$

1.3.2 Ejercicio

- **Probar que la secuencia**

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} \tag{1.25}$$

converge a la razón áurea

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{1.26}$$

1.3.3 Ejercicio

- Probar que la secuencia

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

converge a $\sqrt{2}$

1.4 Extracción de raíces.

La extracción de raíces cuadradas, es decir el cálculo del lado de un cuadrado conocida su área, o bien la diagonal de un rectángulo conocidos los lados es un problema tratado desde muy antiguo, en particular en una tablilla mesopotámica del periodo (2000-1700 a.c.) conservada en el museo de Berlín, se plantea el problema de encontrar la diagonal de una puerta rectangular de ancho 40 y lado 10, ofreciendo la solución $41 + \frac{15}{60}$ (tengamos en cuenta el sistema sexagesimal de los Babilonios) que en notación decimal escribiríamos $41 + \frac{1}{4}$

1.4.1 Ejercicio

Probar que esta solución equivale a tomar para

$$\sqrt{h^2 + d^2} \approx h + \frac{d^2}{2h}$$

en este caso con h=40 y d=10, y que esta aproximación corresponde a la primera iteración del método de Newton para resolver la ecuación

$$x^2 = h^2 + d^2 \tag{1.27}$$

con $x^{(o)} = h$

Un método registrado por Herón de Alejandría para obtener una raiz cuadrada (es decir construir un cuadrado con un área determinada a) consistía en tomar un valor a priori del mismo b y construir un rectángulo de área a, (es decir con lados b y $\frac{a}{b}$), repitiendo sucesivamente el proceso tomando para el paso siguiente el valor medio entre los dos lados del rectángulo b y $\frac{a}{b}$.

1.4.2 Ejercicio

- Probar que este método se corresponde con el método de Newton para obtener la raíz cuadrada de a resolviendo la ecuación $f(x) = x^2 - a = 0$.

Figura~1.4: La extracción de raíces cuadradas ha sido siempre un problema del máximo interés.

- **Solución:** En efecto consideremos un cuadrado de area a, y tomamos un primer valor $x^{(0)} = b$ y como valor $x^{(1)}$
$$x^{(1)} = \frac{1}{2}(x^{(0)} + \frac{a}{x^{(0)}})$$
En el paso siguiente
$$x^{(2)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + \frac{a}{x^{(1)}}) \tag{1.28}$$
y así sucesivamente, de modo que en general en el paso k-ésimo tendremos
$$x^{(k)} = \frac{1}{2}(x^{(k-1)} + \frac{a}{x^{(k-1)}}) \tag{1.29}$$

- Por otra parte el método de Newton
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \tag{1.30}$$
aplicado a $f(x) = x^2 - a = 0$ conduce a
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - a}{2x^{(k)}} \tag{1.31}$$
que podemos simplificar como
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)}}{2} + \frac{a}{2x^{(k)}} \tag{1.32}$$
o más concretamente
$$x^{(k)} = \frac{1}{2}(x^{(k-1)} + \frac{a}{x^{(k-1)}})$$
tal como queríamos demostrar.

1.5 Algebra de computadores

Los métodos iterativos proporcionan técnicas de utilidad en el algebra básica de los computadores.

1.5.1 Ejercicio

- **Probar que la aplicación del método de Newton a la ecuación $x^m - a = 0$ proporciona una técnica para extraer raíces cuadradas y cúbicas utilizando sólo las operaciones de multiplicación y división y permite calcular el inverso de un número $\frac{1}{a}$ sin realizar operaciones de división.**

- **Solución:** En efecto, consideremos la ecuación

$$f(x) = x^m - a = 0 \tag{1.33}$$

donde $m \geq 1$. El método de Newton

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

proporciona el siguiente esquema:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^m - a}{m(x^{(k)})^{m-1}} \tag{1.34}$$

que podemos simplificar como

$$x^{(k+1)} = (1 - \frac{1}{m})x^{(k)} + \frac{a}{m(x^{(k)})^{m-1}} \tag{1.35}$$

que en los casos particulares $m = -1$, $m = 2$, $m = 3$ conduce a

- $m = -1$

$$x^{(k+1)} = (1 - \frac{1}{(-1)})x^{(k)} + \frac{a}{(-1)(x^{(k)})^{-2}} \tag{1.36}$$

es decir

$$x^{(k+1)} = 2x^{(k)} - a(x^{(k)})^2 \tag{1.37}$$

o más concretamente

$$x^{(k+1)} = (2 - ax^{(k)})x^{(k)} \tag{1.38}$$

La sucesión converge a $\frac{1}{a}$ sin necesidad de realizar ningún cociente.

- $m = 2$

$$x^{(k+1)} = (1 - \frac{1}{2})x^{(k)} + \frac{a}{2x^{(k)}} \tag{1.39}$$

o más concretamente

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}) \tag{1.40}$$

que converge a $\sqrt{a}$ realizando sólo operaciones de multiplicación y división.

1.6 La razón áurea

La razón áurea es un parámetro utilizado desde la antiguedad en campos muy diversos que van desde la arquitectura o el diseño a las ciencias de la naturaleza.

El problema básico es el de dividir un segmento AB en dos partes AC y CB de manera que la relación entre la longitud total y el segmento mayor es igual a la relación entre el segmento mayor y el menor.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \tag{1.41}$$

Si denotamos $\frac{AB}{AC} = x$ **y teniendo en cuenta AB=AC+CB podemos poner**

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB - AC} \tag{1.42}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\frac{AB}{AC} - 1} \tag{1.43}$$

es decir que la razón áurea verifica

$$x = \frac{1}{x-1} \tag{1.44}$$

y por tanto es solución de la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.45}$$

Esta ecuación tiene dos raíces

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{1.46}$$

como la razón áurea es mayor que 1 (AB>AC) entonces dicho parámetro debe ser

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \tag{1.47}$$

1.6.1 Ejercicio

- **Estudiar la convergencia (intervalo de convergencia, orden del método) de los siguientes procedimientos iterativos para obtener la razón áurea**

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{x^{(k)} - 1} \tag{1.48}$$

$$x^{(k+1)} = \sqrt{1 + x^{(k)}} \tag{1.49}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{(x^{(k)})^2 + 1}{2(x^{(k)}) - 1} \tag{1.50}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda(\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k)} + 1) \tag{1.51}$$

En el último caso analizar para que valores del parámetro λ **sería posible obtener una convergencia.**

1.7 El verdadero método de Newton

En su obra "De Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum" que podríamos traducir como El método de las Fluxiones(derivadas) y series infinitas, publicado en 1969 Newton propone un método para resolver ecuaciones algebraicas y pone como ejemplo la ecuación

$$y^3 - 2y - 5 = 0 \tag{1.52}$$

Para ello propone que una aproximación a la solución es 2 (ya que hay un cambio de signo entre y=2 e y=3) y por lo tanto la solución deberá escribirse de la forma

$$y = 2 + p \tag{1.53}$$

que sustituyendo en la ecuación nos lleva a

$$(2 + p)^3 - 2(2 + p) - 5 = 0 \tag{1.54}$$

que reagrupando términos nos conduce a

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \tag{1.55}$$

teniendo en cuenta que $p < 1$, **los términos** $p^3 + 6p^2$ **pueden despreciarse frente al resto por lo que obtenemos**

$$10p - 1 \approx 0 \tag{1.56}$$

que nos ofrece

$$p \approx 0.1 \tag{1.57}$$

El procedimiento puede repetirse asumiendo

$$p = 0.1 + q \tag{1.58}$$

que lo sustituimos en 1.55 obteniendo

$$(0.1 + q)^3 + 6\,(0.1 + q)^2 + 10\,(0.1 + q) - 1 = 0 \tag{1.59}$$

que al desarrollar se obtiene

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0 \tag{1.60}$$

que despreciando los términos q^3, q^2 **conduce a**

$$11.23q + 0.061 \approx 0 \tag{1.61}$$

$$q \approx -\frac{0.061}{11.23} = -0.0054 \tag{1.62}$$

que conduce a la aproximación de la solución

$$y \approx 2 + 0.1 - 0.0054 = 2.0946$$

El método puede ser continuado tomando $q = -0.0054 + r$ y así sucesivamente.

El método conocido como método de Newton o método de Newton-Raphson es propuesto por Joseph Raphson en su obra "Analysis aequationum universalis" publicada en 1697 con el objeto de resolver el siguiente problema:

> "Dado el radio de un círculo r y la cuerda de un arco h ¿cual es la cuerda de la tercera parte del ángulo?"

Raphson propone partir de la ecuación trigonométrica

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t \tag{1.63}$$

y utilizar la relación entre el seno de un ángulo y la cuerda del mismo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h/2}{r} \tag{1.64}$$

para plantear (haciendo $t = \frac{\alpha}{2}$)

$$\frac{h/2}{r} = 3\frac{x/2}{r} - 4\left(\frac{x/2}{r}\right)^3$$

que puede simplificarse de la forma

$$c = bx - x^3 \tag{1.65}$$

con $b = 3r^2$ y $c = hr^2$

Para resolver esta ecuación propone utilizar un método iterativo de manera que (en notacion actual) dada una aproximación $x^{(k)}$, la siguiente sería obtenida de la forma $x^{(k+1)} = x^{(k)} + r^{(k)}$ donde $\mathbf{r}^{(k)}$ está dado por

$$r^{(k)} = \frac{c + \left(x^{(k)}\right)^3 - bx^{(k)}}{b - 3(x^{(k)})^2} \tag{1.66}$$

1.7.1 Ejercicio

- Probar que el método diseñado por Raphson es un método iterativo de orden 2.
- Probar que el método de Raphson corresponde al esquema actual del método de Newton para resolver la ecuación (??)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Solución:

En efecto, el método podemos escribirlo de la forma

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \frac{c + \left(x^{(k)}\right)^3 - bx^{(k)}}{b - 3(x^{(k)})^2} \tag{1.67}$$

o bien

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{c + \left(x^{(k)}\right)^3 - bx^{(k)}}{b - 3(x^{(k)})^2} \tag{1.68}$$

que corresponde a un caso particular de un método de iteración de punto fijo del tipo $x = g(x)$ con

$$g(x) = x + \frac{c + x^3 - bx}{b - 3x^2} = \frac{bx - 3x^3 + c + x^3 - bx}{b - 3x^2} = \frac{2x^3 - c}{3x^2 - b}$$

la derivada $g'(x)$ está dada por

$$g'(x) = \frac{6x^2(3x^2 - b) - 6x\left(2x^3 - c\right)}{\left(3x^2 - b\right)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 b + 6xc}{\left(3x^2 - b\right)^2}$$

que podemos simplificar como

$$g'(x) = \frac{6x\left(x^3 - bx + c\right)}{\left(3x^2 - b\right)^2} \tag{1.69}$$

Ahora bien, si s es una solución de la ecuación propuesta verifica $c = bs - s^3$ por lo que sustituyendo se verifica

$$g'(s) = 0$$

condición necesaria para que el método sea de orden 2.

Para ver que precisamente el método es de orden 2 y no superior, es necesario probar que $g^{''}(s) \neq 0$ lo cual verificamos de manera más simple escribiendo

$$g'(x) = \frac{6x\,(f(x))}{q(x)}$$

con lo que

$$g^{''}(x) = \frac{\left(6f(x) + 6xf'(x)\right)q(x) - 6x\,(f(x))\,q'(x)}{\left(q(x)\right)^2} \tag{1.70}$$

donde hemos denotado por $q(x)$ al denominador $q(x) = \left(3x^2 - b\right)^2$ y por $f(x) = x^3 - bx + c$ la ecuación a resolver, con lo que si s es la solución del problema

$$\begin{aligned} g^{''}(s) &= \frac{\left(6f(s) + 6xf'(s)\right)q(s) - 6x\,(f(s))\,q'(s)}{\left(q(s)\right)^2} = \frac{6sf'(s)}{(q(s))} = \\ &= \frac{6s\left(3s^2 - b\right)}{\left(3s^2 - b\right)^2} = \frac{6s}{(3s^2 - b)} \end{aligned}$$

1.8 Método de Halley

Edmond Halley (1656-1742) fue un astrónomo inglés tras observar el tránsito del planeta Mercurio sobre el sol, propuso una forma de obtener la distancia al sol utilizando el tránsito del planeta Venus, así como predijo la periodicidad de la órbita del cometa que lleva su nombre. Propuso una variante del método de Newton para resolver ecuaciones del tipo

$$f(x) = 0$$

utilizando un desarrollo hasta el segundo orden en torno a una aproximación $\mathbf{x}^{(k)}$ **de la solución** s **de la ecuación**

$$f(s) = 0 \approx f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(s - x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(k)})(s - x^{(k)})^2 \tag{1.71}$$

que puede ser reescrita denotando por $\mathbf{x}^{(k+1)}$ **la aproximación obtenida al resolver la ecuación anterior como**

$$f(x^{(k)}) + (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \left[f'(x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \right] = 0$$

incorporando en el término $(x^{(k+1)} - x^{(k)})$ **incluido en el paréntesis el resultado de la iteración de Newton con lo que resulta**

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{2f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{2[f(x^{(k)})]^2 - f(x^{(k)})f''(x^{(k)})} \tag{1.72}$$

1.8.1 Ejercicio

- **Probar que el método de Halley puede obtenerse aplicando el método de Newton a la ecuación**

$$\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} = 0 \tag{1.73}$$

1.8.2 Ejercicio

- **Probar que el método de Halley es de orden 3.**

Solución.

- Al plantear el método de Halley observamos que la ecuación a resolver se escribe de forma que

$$g(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \tag{1.74}$$

Probar que el método es de orden 3 implica probar que

  - $\mathbf{g'(s) = g''(s) = 0}$

- $\mathbf{g'''(s) \neq 0}$
- El planteamiento anterior lleva a realizar tres derivadas sucesivas de la expresión anterior lo cual a primera vista parece exageradamente engorroso.

- Sin embargo podemos establecer algunas simplificaciones en el método para llevar a cabo la tarea basadas en:
  - i) Simplificar la notación. Es evidente que la dependencia de x se da para todas las funciones por lo tanto podemos poner el cálculo de la derivada como

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{2ff'}{2(f')^2 - ff''}\right)$$

  - ii) Agrupación de términos y mantenimiento de un esquema formal. Salvado el problema trivial de derivar la x, el problema se reduce a calcular reiteradamente la derivada de un cociente, por lo tanto si definimos
    $u = 2ff'$
    $v = 2(f^{'})^2 - ff^{''}$
    el problema se plantea como el de calcular la derivada reiterada de $\frac{u}{v}$

- *Manos a la obra.*

Al calcular la primera derivada

$$g'(x) = 1 - \frac{u'v - v'u}{v^2} \tag{1.75}$$

ahora bien,

$u' = 2f'f' + 2ff'' = 2\left(f'\right)^2 + 2ff''$

$v' = 4f'f'' - f'f'' - ff''' = 3f'f'' - ff'''$

Al sustituir en la solución y teniendo en cuenta que $f(s) = 0$

$u(s) = 0$

$v(s) = 2(f^{'}(s))^2$

$u'(s) = 2\left(f'(s)\right)^2$

$v'(s) = 3f'(s)f''(s)$

Por lo tanto al sustituir en (1.75) tenemos

$$g'(s) = 1 - \frac{u'(s)v(s)}{v^2} = 1 - \frac{2(f^{'}(s))^2 2(f^{'}(s))^2}{\left(2(f^{'}(s))^2\right)^2} = 0 \tag{1.76}$$

- Para calcular la segunda derivada repetimos la idea:

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{u'v - v'u}{v^2}\right) \tag{1.77}$$

haciendo

$z = (v'u - u'v)$

$w = v^2$

Por tanto

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{z'w - zw'}{w^2} \tag{1.78}$$

Ahora bien

$z' = v''u + v'u' - u''v - u'v' = (v''u - u''v)$

$w' = 2vv'$

y teniendo en cuenta que $u(s) = 0$ y que $u'(s) = v(s)$ simplificamos

$z(s) = -u'(s)v(s) = -v(s)^2$

$w(s) = v(s)^2$

$z'(s) = -u''(s)v(s)$

$w' = 2v(s)v'(s)$

sustituyendo

$$g''(s) = \frac{-u''(s)v(s)v(s)^2 + v(s)^2 2v(s)v'(s)}{w^2} = \frac{v(s)^3\left(-u''(s) + 2v'(s)\right)}{w^2} \tag{1.79}$$

debemos calcular $u''(s)$

$u'' = \frac{d}{dx}\left(2\left(f'\right)^2 + 2ff''\right) = 4f'f'' + 2f'f'' + 2ff''' = 6f'f'' + 2ff'''$

$u''(s) = 6f'(s)f''(s)$

y recordando que $v'(s) = 3f'(s)f''(s)$ vemos que $-u''(s) + 2v'(s) = 0$ y por tanto

$$g''(s) = 0 \tag{1.80}$$

1.8.3 Ejercicio adicional

- Se propone como ejercicio adicional siguiendo la misma técnica probar que

$$g'''(s) = -\left\{\frac{f'''(s)}{f'(s)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(s)}{f'(s)}\right)\right\}$$