Capítulo 3

Interpolación

El problema de interpolación es muy antiguo y podemos situar sus orígenes en el Almagesto de Tolomeo y sus métodos para determinar la cuerda de un ángulo inscrito en una circunferencia en función del radio de ésta. (los hindúes utilizaban la semicuerda, cuyo cociente con el radio daría nuestra función seno) . Combinando los valores del ángulo mitad y la suma y diferencia Tolomeo estableció su primera tabla de cuerdas, utilizando interpolación para calcular valores intermedios. La primera tabla de la función seno aparece en la obra del persa Mohammed Ibn Musa abu Djafar Al-Khwarizmi (780-850) cuyo último nombre que ha dado lugar al término algoritmo proviene de su ciudad de nacimiento Khwarizmi (la actual Khiba en Uzbekistan) ciudad situada al sudeste del mar de Aral en la ruta de la seda.

Las tablas trigonométricas permitieron durante bastante tiempo simplificar los cálculos a través de la relación

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \tag{3.1}$$

que permitía convertir productos en sumas antes de la llegada de los logaritmos.

Es precisamente en la confección de tablas de logaritmos incoroporados por John Napier (1550-1617) y principalmente por Henry Briggs (1561-1631) donde se hace un uso más extenso de estrategias de interpolación.

La interpolación básica utilizada inicialmente fue la interpolación lineal en la que si en un intervalo $[a, b]$ conocemos los valores de una función en los extremos $f(a)$, $f(b)$, el valor de la función en un punto intermedio x estará dado en razón a las distancias a los puntos a y b.

$$\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a} \tag{3.2}$$

Son James Gegory, Thomas Harriot, y el propio Isaac Newton, en el siglo XVII, los que comienzan a hacer uso de fórmulas de interpolación de grado superior, en concreto Newton para determinar los puntos intermedios de la órbita de un cometa sugiere utilizar una línea parabólica (la cual para Newton es un polinomio cuyo grado puede ir desde 2 hasta 5).

Lagrange utiliza su técnica de interpolación tratando de resolver el problema de determinar la distancia a una serie de puntos conocidas las distancias entre ellos y los ángulos medidos desde un observador distante, en sus lecciones en L'Ecole Normale de Paris en 1795.

3.1 Interpolación de Lagrange

3.1.1 Ejercicio

- **Considerado el problema de interpolación**

i	0	1	2	3
x_i	0	-1	1	2
y_i	0	1	1	16

(3.3)

obtener el polinomio interpolador en la forma de Lagrange y desarrollar el mismo en la base $1, x, x^2, x^3, ...$

- **Solución:**
- Teniendo en cuenta que

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) l_i(x)$$

y que los polinomios $l_i(x)$ están dados por

$$l_o(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-(-1))(x-16)}{(1-0)(1-(-1))(1-16)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-(-1))(x-1)}{(2-0)(2-(-1))(2-1)}$$

se llega a

$$\begin{aligned} p_3(x) \;\; &= \;\; 0\frac{(x-(-1))(x-1)(x-2)}{(0-(-1))(0-1)(0-2)} + 1\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + \\ &\quad + \frac{(x-0)(x-(-1))(x-2)}{(1-0)(1-(-1))(1-2)} + 16\frac{(x-0)(x-(-1))(x-1)}{(2-0)(2-(-1))(2-1)} \end{aligned}$$

de donde

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}x\,(x-1)\,(x-2) - \frac{1}{2}x\,(x+1)\,(x-2) + \frac{8}{3}x\,(x+1)\,(x-1)$$

simplificando

$$p_3(x) = 2x^3 + x^2 - 2x$$

- Comprobación de la condición de interpolación:
  - $p_3(0) = 2(0)^3 + (0)^2 - 2(0) = 0$
  - $p_3(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) = 1$
  - $p_3(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) = 1$
  - $p_3(1) = 2(2)^3 + (2)^2 - 2(2) = 16$

Figura˜3.1: Giuseppe Lodovico Lagrangia nacido en Turín (Italia) más conocido como Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

3.1.2 Ejercicio

Encontrar el polinomio interpolador en la forma de Newton del siguiente problema:

i	0	1	2	3
x_i	1	0	2	-1
$f(x_i)$	2	-1	7	-2

Solución

Consideremos la tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{llll}
x_o = 1 & f(x_o) = 2 & & \\
x_1 = 0 & f(x_1) = -1 & f[x_1, x_o] = \frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o} = \frac{-1-2}{0-1} = 3 & \\
x_2 = 2 & f(x_2) = 7 & f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{7-(-1)}{2-0} = 4 & f[x_2, x_1, x_o] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_o]}{x_2-x_o} = \frac{4-3}{2-1} = 1 \\
x_3 = -1 & f(x_3) - 2 & f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x3-x_2} = \frac{-2-7}{-1-2} = 3 & f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{3-4}{-1-0} = 1
\end{array}$$

$f[x_3, x_2, x_1, x_o] = \frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_o]}{x_3-x_o} = \frac{1-1}{-1-1} = 0$

En resumen la tabla queda de la forma

1	2			
0	-1	3		
2	7	4	1	
-1	-2	3	1	0

Con lo que los sucesivos polinomios de interpolación en la forma de Newton son

$P_o(x) = f(x_o) = 2$

$P_1(x) = P_o(x) + f[x_1, x_o](x - x_o) = 2 + 3(x - 1)$

$P_2(x) = P_1(x) + f[x_2, x_1, x_o](x - x_0)(x - x_1) = 2 + 3(x - 1) + 1(x - 1)x$

$P_3(x) = 2 + 3(x - 1) + 1(x - 1)x + 0(x - 1)x(x - 2) = x^2 + 2x - 1$

Comprobamos la condición de interpolación

- $P_3(1) = 1 + 2 - 1 = 2$
- $P_3(0) = -1$
- $P_3(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 7$
- $P_3(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$

Figura˜3.2: James Gregory (1638-1675) Sus notables contribuciones al cálculo y a la astronomía (diseñó un telescopio de reflexión que estuvo en uso más de 150 años) han quedado oscurecidas por la figura de Newton.

- **Considere los sucesivos polinomios de interpolación de grado 0,1,2,3,4 a la función** $f(x) = x^4$ **en los puntos** $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

Solución: En efecto consideremos la tabla de diferencias divididas

0	0				
1	1	$\frac{1-0}{1} = 1$			
-1	1	$\frac{1-1}{-1-1} = 0$	$\frac{0-1}{-1-0} = 1$		
2	16	$\frac{16-1}{2-(-1)} = 5$	$\frac{5-0}{2-1} = 5$	$\frac{5-1}{2-0} = 2$	
-2	16	$\frac{16-16}{-1-2} = 0$	$\frac{0-5}{-2-(-1)} = 5$	$\frac{5-5}{-2-1} = 0$	$\frac{0-2}{-2-0} = 1$

De donde obtenemos los polinomios

- $p_o(x) = f(x_o) = 0$
- $p_1(x) = p_o(x) + f[x_1, x_o](x - x_o) = x$
- $p_2(x) = p_1(x) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_o)(x - x_1) = x + x(x-1) = x^2$
- $p_3(x) = p_2(x) + f[x_3, x_2, x_1, x_o](x - x_o)(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 2(x(x-1)(x-(-1))) =$
  $= x^2 + 2x^3 - 2x$
- $p_4(x) = p_3(x) + f[x_4, x_3, x_2, x_1](x - x_o)(x - x_1)(x - x_2)\ (x - x_3) =$
  $= x^2 + 2x^3 - 2x + x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4$

Donde observamos que el polinomio de grado 4 es el propio polinomio x^4

3.2 Formas recursivas.

Existen diferentes formas recursivas de calcular los polinomios interpoladores, en particular los algoritmos de Neville y Aitken están basados en la siguiente propiedad:

3.2.1 Ejercicio

- **Probar que si denotamos por $P_n(x)$ el polinomio de interpolación sobre los puntos $x_o, x_1, ..., x_n$ y por $P_{n-1(k)}(x)$ el polinomio de grado $n-1$,sobre los nodos** $x_o, x_1, ..., x_{k-1},\ x_{k+1}, ..., x_n$, se tiene:
$$P_n(x) = \frac{(x-x_j)P_{n(j)}(x) - (x-x_i)P_{n-1(i)}(x)}{(x_i - x_j)} \tag{3.4}$$

3.3 Nodos igualmente espaciados.

En el caso de que los nodos se encuentren igualmente espaciados la forma del polinomio interpolador puede simplificarse notablemente

3.3.1 Ejercicio

- **Considerese un problema de interpolación con nodos igualmente espaciados que podemos escribir de la forma**
$$x_i = x_o + ih$$
donde h es un parámetro fijo.
- **Probar que el polinomio interpolador puede escribirse en una forma simplificada en la que parte del mismo es independiente de los nodos de interpolación. (Sugerencia: realizar el cambio de variable $x = x_o + \mu h$ y expresar el polinomio en términos de la variable μ).**
- **Aplicar la forma del polinomio al cálculo de la integral**
$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \tag{3.5}$$
sustituyendo el integrando por un polinomio interpolador y calculando la integral del polinomio.

Solución: Considérese el problema de interpolación $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$ con nodos igualmente espaciados que escribimos de la forma

$$x_i = x_o + ih \tag{3.6}$$

para calcular el polinomio de interpolación en la forma de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{in}(x) \tag{3.7}$$

siendo los polinomios

$$l_{in}(x) = \prod_{j=0 (j \neq i)}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{3.8}$$

o bien escrito de otra forma

$$l_{in}(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_o)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

En el caso de que los nodos estén igualmente espaciados si hacemos el cambio de variable

$$x = x_o + \mu h \tag{3.9}$$

podemos poner

- $x = x_o + \mu h$
- $x_i = x_o + ih$
- $x_j = x_o + jh$

de donde

$x - x_j = (\mu - j)h$

$x_i - x_j = (i - j)h$

por lo que en términos de la variable μ los polinomios $l_{in}(x)$ los podemos poner como

$$l_{in}(x) = \prod_{j=0 (j \neq i)}^{n} \frac{(\mu - j)h}{(i - j)h}$$

es decir

$$l_{in}(x) = \prod_{j=0 (j \neq i)}^{n} \frac{(\mu - j)}{(i - j)} \tag{3.10}$$

vemos que los polinomios $l_{in}(x)$ no dependen del valor particular de los nodos x_i sino de cuantos nodos son.

Así pues el polinomio interpolador se escribe de la forma

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0 (j \neq i)}^{n} \frac{(\mu - j)}{(i - j)} \tag{3.11}$$

donde la variable μ sobre la que hemos hecho el cambio de variable está dada por

$$\mu = \frac{x - x_o}{h}$$

es decir la distancia al primer nodo partido por la distancia entre nodos.

Esta forma es particularmente útil cuando precisamos aproximar una integral por la integral del polinomio interpolador. Así por ejemplo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx \tag{3.12}$$

que teniendo en cuenta la forma de Lagrange ponemos como

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_{in}(x)dx \tag{3.13}$$

con el cambio de variable establecido queda

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{\frac{a-x_o}{h}}^{\frac{b-x_o}{h}} l_{in}(\mu)hd\mu$$

donde hemos tenido en cuenta el cambio de variable en los límites de integración y además que $dx = hd\mu$

La integral la escribimos pues de la forma

$$\int_a^b p_n(x)dx = h\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_{\frac{a-x_o}{h}}^{\frac{b-x_o}{h}} \prod_{j=0(j\neq i)}^{n} \frac{(\mu - j)}{(i-j)}d\mu \tag{3.14}$$

En resumen, observamos que la integral queda escrita de la forma:

La distancia entre los nodos h como un factor multiplicativo

La suma de los valores de la función en los nodos $f(x_i)$ multiplicada por un factor

$$\int_{\frac{a-x_o}{h}}^{\frac{b-x_o}{h}} \prod_{j=0(j\neq i)}^{n} \frac{(\mu - j)}{(i-j)}d\mu$$

que no depende del valor particular de los nodos sino del número de éstos.

En el caso de que el nodo x_o sea elegido como el extremo izquierdo de la integral $x_o = a$, entonces el límite inferior de la integral es cero.

Casos particulares.

Consideremos en primer lugar sólo dos nodos. En este caso (3.11) estará dado por

$$p_1(x) = f(x_o)\frac{x - x_1}{x_o - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_o}{x_1 - x_o}$$

con el cambio de variable x= $x_o + \mu h$ nos queda

- $x = x_o + \mu h$
- $x_1 = x_o + h$
- $x - x_o = \mu h$
- $x - x_1 = (\mu - 1)h$
- $x_1 - x_o = h$
- $x_o - x_1 = -h$

que al sustituir nos ofrece

$$p_1(x(\mu)) = f(x_o)\frac{(\mu - 1)h}{-h} + f(x_1)\frac{\mu h}{h} \tag{3.15}$$

que simplificando queda

$$p_1(x(\mu)) = -f(x_o)(\mu - 1) + f(x_1)\mu \tag{3.16}$$

Al sustituir en la integral

$$\int_a^b p_1(x)dx = -f(x_o)\int_{\frac{a-x_o}{h}}^{\frac{b-x_o}{h}} (\mu - 1)hd\mu + f(x_1)\int_{\frac{a-x_o}{h}}^{\frac{b-x_o}{h}} \mu hd\mu \tag{3.17}$$

En el caso particular de que $a = x_o$ y $b = x_1$ la integral queda de la forma

$$\int_a^b p_1(x)dx = -f(x_o)\int_0^1 (\mu - 1)hd\mu + f(x_1)\int_0^1 \mu hd\mu \tag{3.18}$$

donde teniendo en cuenta que

- $\int_0^z (\mu - 1)d\mu = \frac{1}{2}z^2 - z$
- $\int_0^z \mu d\mu = \frac{1}{2}z^2$

$$\int_a^b p_1(x)dx = \frac{1}{2}hf(x_o) + \frac{1}{2}hf(x_1) \tag{3.19}$$

que podemos simplificar como

$$\int_a^b p_1(x)dx = \frac{1}{2}h(f(x_o) + f(x_1))$$

aplicandolo a

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

con $x_o = 1$, $x_1 = 2$, en este caso h=1, obtenemos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} = 0.75$$

que podemos comparar con el valor exacto de la integral

- $\ln(2) = 0.69315$

- El error cometido ha sido

$$0.69315 - 0.75 = -0.0\,56 \tag{3.20}$$

Consideremos ahora el caso de tres nodos. En este caso

$$p_2(x) = f(x_o)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Con el cambio de variable

con el cambio de variable $x = x_o + \mu h$ nos queda

- $x = x_o + \mu h$
- $x_1 = x_o + h$
- $x_2 = x_o + 2h$
- $x - x_o = \mu h$
- $x - x_1 = (\mu - 1)h$
- $x - x_2 = (\mu - 2)h$
- $x_1 - x_o = h$
- $x_o - x_1 = -h$
- $x_2 - x_o = 2h$
- $x_2 - x_1 = h$

$$p_2(x(\mu)) = f(x_o)\frac{(\mu-1)h(\mu-2)h}{(-h)(-2h)} + f(x_1)\frac{\mu h(\mu-2)h}{(h)(-h)} + f(x_2)\frac{\mu h(\mu-1)h}{(2h)(h)} \tag{3.21}$$

que simplificamos como

$$p_2(x(\mu)) = \frac{1}{2}f(x_o)(\mu-1)(\mu-2) - f(x_1)\mu(\mu-2) + \frac{1}{2}f(x_2)\mu(\mu-1) \tag{3.22}$$

Si consideramos la integral

$$\int_a^b p_2(x)dx \tag{3.23}$$

donde $x_o = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{2}$, $x_2 = b$, $h = \frac{b-a}{2}$, $dx = hd\mu$ llegamos a

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{1}{2}f(x_o)\int_0^2 (\mu-1)(\mu-2)hd\mu - f(x_1)\int_0^2 \mu(\mu-2)hd\mu + \frac{1}{2}f(x_2)\int_0^2 \mu(\mu-1)hd\mu$$

y teniendo en cuenta que

- $\int_0^2 (\mu-1)(\mu-2)d\mu = \frac{2}{3}$

- $\int_0^2 \mu(\mu-2)d\mu = -\frac{4}{3}$
- $\int_0^2 \mu(\mu-1)d\mu = \frac{2}{3}$

llegamos a

$$\int_a^b p_2(x)dx = h(\frac{1}{3}f(x_o) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)) \tag{3.24}$$

particularizando a nuestro problema $a = x_o = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $b = x_2 = 2$, $h = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{36} = 0.69444 \tag{3.25}$$

que podemos comparar con el valor exacto $\ln(2) = 0.69315$

Cálculo del error

Considere en el caso anterior un cálculo del error cometido

En el caso de dos nodos

$$f(x) = p_1(x) + e_1(x) \tag{3.26}$$

con lo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_1(x)dx + \int_a^b e_1(x)dx \tag{3.27}$$

ahora bien

$$\int_a^b e_1(x)dx = \int_a^b (x-x_o)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2!}dx \tag{3.28}$$

cuando $x_o = a$, $x_1 = b$, la función $(x-x_o)(x-x_1)$ no cambia de signo en el intervalo [a,b] de manera que podemos aplicar el teorema del valor medio a la integral y garantizar que existe un valor de ξ (en este caso no dependiente de x) de manera que

$$\int_a^b (x-x_o)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2!}dx = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-x_o)(x-x_1)dx \tag{3.29}$$

la integral podemos resolverla con el cambio de variable $x = x_o + \mu h$ con $h = x_1 - x_o$ con lo que resulta

$$\int_a^b (x-x_o)(x-x_1)dx = \int_0^1 \mu h(\mu-1)hhd\mu = -\frac{1}{6}h^3 \tag{3.30}$$

con lo que el error podemos ponerlo como

$$\int_a^b e_1(x)dx = -\frac{1}{6}h^3\frac{f''(\xi)}{2!} \tag{3.31}$$

es decir

$$\int_a^b e_1(x)dx = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi) \tag{3.32}$$

en el caso particular que nos ocupa

$$f^{''}(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{x}) = \frac{2}{x^3} \tag{3.33}$$

en el intervalo [1,2] es una función decreciente por lo que el máximo se da para $x = 1$, es decir

$$\left|f^{''}(x)\right| \leq 2 \tag{3.34}$$

Por tanto podemos decir que el máximo error que pudiera cometerse estaría dado por

$$\left|\int_a^b e_1(x)dx\right| < \frac{1}{6} = 0.16 \tag{3.35}$$

que evidentemente es superior al error calculado previamente en la expresión (3.20)

En el caso de tres nodos

$$\int_a^b e_2(x)dx = \int_a^b (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f'''(\xi_x)}{3!}dx \tag{3.36}$$

en este caso no podemos aplicar directamente el teorema del valor medio, ya que la función $(x - x_o)(x-x_1)(x-x_2)$ cambia de signo en el interior del intervalo [a,b],

Pero si reparamos en que esta función es impar respecto del punto central del intervalo, podemos resolver esta dificultad aplicando integración por partes.

En primer lugar nos será más conveniente expresar el error de la forma

$$\int_a^b e_2(x)dx = \int_a^b (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)f[x,x_o,x_1,x_2]dx \tag{3.37}$$

hacemos

- $u = f[x, x_o, x_1, x_2]$
- $dv = (x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)dx$

con lo que

- $v = \int_a^x (z-x_o)(z-x_1)(z-x_2)dz$
- $du = f[x, x, x_o, x_1, x_2]dx$
- donde hemos hecho uso de que

$$\frac{d}{dx}f[x,x_o,x_1,x_2] = f[x,x,x_o,x_1,x_2]$$

por lo que la integral después de integrar por partes

$$\int_a^b e_2(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b v(x)du \tag{3.38}$$

nos queda, sustituyendo

$$\int_a^b e_2(x)dx = [v(x)f[x,x_o,x_1,x_2]]_a^b - \int_a^b v(x)f[x,x,x_o,x_1,x_2]dx \tag{3.39}$$

Si hacemos el cambio de variable $z = x_1 + \alpha h$ llegamos a

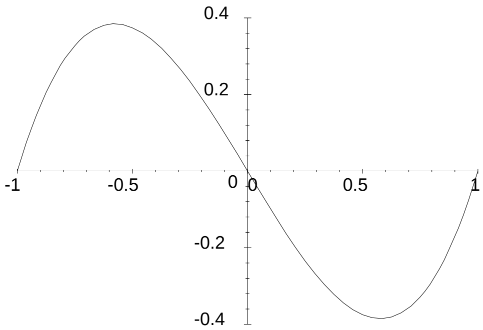
$x_o = x_1 - h$

$x_2 = x_1 + h$

$$v = \int_{-1}^{p} (\alpha+1)h\alpha h(\alpha-1)hhd\alpha \tag{3.40}$$

donde $p = \frac{x-x_1}{h}$, simplificando

$$v = h^3 \int_{-1}^{\frac{x-x_1}{h}} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha$$



vemos que el integrando es una función impar es decir simétrica respecto del origen (f(-x)=-f(x)) por tanto si $-1 < p \leq 0$

$$v(p) = \int_{-1}^{p} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha > 0 \tag{3.41}$$

si $0 < p \leq 1$ entonces

$$v(p) = \int_{-1}^{p} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha = \int_{-1}^{-p} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha + \int_{-p}^{p} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha \tag{3.42}$$

y como $\int_{-p}^{p} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha = 0$ por la simetría del integrando llegamos a que

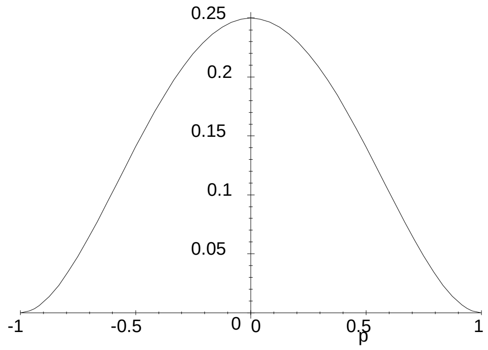
$$v(p) > 0, \qquad -1 < p < 1$$

o lo que es lo mismo v(x) no cambia de signo en el intervalo [a,b].

Además como $v(p=1) = \int_{-1}^{1} \alpha(\alpha^2-1)d\alpha = 0$ por la simetría del intervalo llegamos a la conclusión de que v(b)=0 al igual que v(a) ya que en este caso los límites superior e inferior de la integral coinciden. (Esto podemos comprobarlo haciendo la integral (3.41) que nos da

$$v(p) = \frac{1}{4}p^4 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(p-1)^2(p+1)^2$$

que vemos que no cambia de signo en el intervalo [-1,1], si bien se anula en sus dos extremos



Así pues en resumen los resultados anteriores nos llevan a

$$\int_a^b e_2(x)dx = -\int_a^b v(x)f[x, x, x_o, x_1, x_2]dx \tag{3.43}$$

y como la función $v(x)$ no cambia de signo en el intervalo [a,b] podemos aplicar el teorema del valor medio con lo que existe un ξ de manera que

$$\int_a^b e_2(x)dx = -f[\xi, \xi, x_o, x_1, x_2]\int_a^b v(x)dx \tag{3.44}$$

Para calcular $\int_a^b v(x)dx$ podemos sustituir, o bien aplicar integración por partes poniendo

$$\int_a^b v(x)dx = [v(x)(x-a)]_a^b - \int_a^b (x-a)v'(x)dx \tag{3.45}$$

donde el primer sumando es nulo y el segundo está dado por

$$-\int_a^b (x-a)v'(x)dx = -\int_a^b (x-a)(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)dx \tag{3.46}$$

que teniendo en cuenta que $x_o = a$ escribimos como

$$\int_a^b v(x)dx = -\int_a^b (x-x_o)^2(x-x_1)(x-x_2)dx \tag{3.47}$$

que haciendo el cambio $x = x_o + \mu h$ nos lleva a

$$\int_a^b v(x)dx = -\int_0^2 (\mu h)^2(\mu-1)h(\mu-2)hhd\mu = -\frac{4}{15}h^5 \tag{3.48}$$

Así pues, teniendo en cuenta que

$$f[\xi, \xi, x_o, x_1, x_2] = \frac{f^{(iv)}(\eta)}{4!} \tag{3.49}$$

nos lleva a

$$\int_a^b e_2(x)dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(iv)}(\eta)$$

la conclusión a la que llegamos es que la integral sería exacta no sólo si f(x) es un polinomio de grado 2, que se interpolaría a si mismo, sino también si f(x) es un polinomio de grado 3.

3.4 John Couch Adams y la órbita de Neptuno.

John Couch Adams fué un matemático británico que a muy temprana edad predijo la existencia y posición del planeta bautizado posteriormente como Neptuno analizando las irregularidades de la órbita de Urano, previamente descubierto por W. Herschel. Sin embargo sus predicciones no fueron tenidas en cuenta y ello permitió que se le adelantara la realizada por el francés Urban Leverrier, esta última confirmada por el astrónomo alemán Galle.

Adams desarrolló métodos de resolución de ecuaciones diferenciales utilizando la siguiente técnica. Partiendo de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{3.50}$$

Integró dicha ecuación sobre el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, **donde** x_i, x_{i+1} **son dos puntos genéricos para obtener**

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \tag{3.51}$$

Es decir

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \tag{3.52}$$

La integral del término de la derecha la aproximó considerando un polinomio interpolador sobre los nodos x_i, x_{i-1}, x_{i-2} **e integrando dicho polinomio:**

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_2(x)dx$$

donde los puntos $\{x_j\}$ **están igualmente espaciados** $x_k = x_{k-1} + h$

3.4.1 Ejercicio

- ---
- **Demostrar que con esta técnica la ecuación (3.52) se aproxima por**

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) \tag{3.53}$$

  donde f_j **denota** $f_j = f(x_j, y(x_j))$

Solución:

En efecto, consideremos el polinomio interpolador a la función $f(x, y(x))$ en los puntos x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, que corresponderá a un polinomio de grado 2. Si denotamos por $f_k = f(x_k, y(x_k))$ tenemos en la forma de Lagrange:

$$P_2(x) = l_0(x)f_i + l_1(x)f_{i-1} + l_2(x)f_{i-2} \tag{3.54}$$

donde

$$l_0(x) = \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})} \tag{3.55}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i-2})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i-2})} \tag{3.56}$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(x_{i-2} - x_i)(x_{i-2} - x_{i-1})} \tag{3.57}$$

Al sustituir este polinomio en la fórmula de integración

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx \tag{3.58}$$

el problema queda reducido a calcular las integrales

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_2(x)dx = f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)dx + f_{i-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_1(x)dx + f_{i-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} l_2(x)dx \tag{3.59}$$

Estas integrales pueden realizarse de forma sencilla utilizando el cambio de variable $x = x_i + \mu h$, así

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})} dx \tag{3.60}$$

se reduce a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \int_0^1 \frac{(\mu + 1)h(\mu + 2)h}{h\,(2h)} h d\mu \tag{3.61}$$

donde se ha tenido en cuenta que $dx = hd\mu$ y que $x - x_{i-1} = x_i + \mu h - (x_i - h) = (\mu + 1)h$ y análogamente $x - x_{i-2} = (\mu + 2)h$ además de que en los límites de integración $x = x_i \Rightarrow \mu = 0$ y $x = x_{i+1} \Rightarrow \mu = 1$.

La integral queda pues

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_0(x)dx = \frac{1}{2}h \int_0^1 (\mu + 1)(\mu + 2)\,d\mu = \frac{1}{2}h \int_0^1 (\mu^2 + 3\mu + 2)d\mu = \frac{23}{12}h \tag{3.62}$$

De la misma forma

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i-2})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i-2})} dx$$

se reduce a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_1(x)dx = \int_0^1 \frac{\mu h(\mu + 2)h}{(-h)\,h} h d\mu = -\frac{4}{3}h \tag{3.63}$$

y análogamente

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} l_2(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{(x_{i-2} - x_i)(x_{i-2} - x_{i-1})} dx$$