Sobre la prueba de que el método de Halley es de orden 3

Justo R. Pérez Cruz
Facultad de Física. Universidad de La Laguna

Curso 2006/07

Abstract

Probar que el método de Halley es de orden 3 es aparentemente un engorroso ejercicio de derivación sucesiva. Sin embargo se hace ver que una simplificación de la notación y un plantemiento estructurado del problema permiten simplificar éste notablemente.

Problema.

El método de Halley

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{2f(x^{(k)})f'(x^{(k)})}{2[f'(x^{(k)})]^2 - f(x^{(k)})f''(x^{(k)})}$$

es un caso particular de los métodos de iteración de punto fijo $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$. *Probar que para este método*

- $g'(s) = g''(s) = 0$
- $g'''(s) = -\left\{\frac{f'''(s)}{f'(s)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(s)}{f'(s)}\right)\right\}$

Solución.

Al plantear el método de Halley observamos que la ecuación a resolver se escribe de forma que

$$g(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \tag{1}$$

El planteamiento anterior lleva a realizar tres derivadas sucesivas de la expresión anterior lo cual a primera vista parece exageradamente engorroso.

Sin embargo podemos establecer algunas simplificaciones en el método para llevar a cabo la tarea basadas en:

- i) Simplificar la notación. Es evidente que la dependencia de x se da para todas las funciones por lo tanto podemos poner el cálculo de la derivada como

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{2ff'}{2(f')^2 - ff''}\right)$$

- ii) Agrupación de términos y mantenimiento de un esquema formal. Salvado el problema trivial de derivar la x, el problema se reduce a calcular reiteradamente la derivada de un cociente, por lo tanto si definimos

  $u = 2ff'$

  $v = 2(f')^2 - ff''$

  el problema se plantea como el de calcular la derivada reiterada de $\frac{u}{v}$

Manos a la obra.

Al calcular la primera derivada

$$g'(x) = 1 - \frac{u'v - v'u}{v^2} \tag{2}$$

ahora bien,

$u' = 2f'f' + 2ff'' = 2\left(f'\right)^2 + 2ff''$

$v' = 4f'f'' - f'f'' - ff''' = 3f'f'' - ff'''$

Al sustituir en la solución y teniendo en cuenta que $f(s) = 0$

$u(s) = 0$

$v(s) = 2(f^{'}(s))^2$

$u'(s) = 2\left(f'(s)\right)^2$

$v'(s) = 3f'(s)f''(s)$

Por lo tanto al sustituir en (2) tenemos

$$g'(s) = 1 - \frac{u'(s)v(s)}{v^2} = 1 - \frac{2(f^{'}(s))^2 2(f^{'}(s))^2}{\left(2(f^{'}(s))^2\right)^2} = 0 \tag{3}$$

Para calcular la segunda derivada repetimos la idea:

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{u'v - v'u}{v^2}\right) \tag{4}$$

haciendo

$z = (v'u - u'v)$

$w = v^2$

Por tanto

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{z'w - zw'}{w^2} \tag{5}$$

Ahora bien

$z' = v''u + v'u' - u''v - u'v' = (v''u - u''v)$

$w' = 2vv'$

y teniendo en cuenta que $u(s) = 0$ y que $u'(s) = v(s)$ simplificamos

$z(s) = -u'(s)v(s) = -v(s)^2$

$w(s) = v(s)^2$

$z'(s) = -u''(s)v(s)$

$w' = 2v(s)v'(s)$

sustituyendo

$$g''(s) = \frac{-u''(s)v(s)v(s)^2 + v(s)^2 2v(s)v'(s)}{w^2} = \frac{v(s)^3\left(-u''(s) + 2v'(s)\right)}{w^2} \tag{6}$$

debemos calcular $u''(s)$

$u'' = \frac{d}{dx}\left(2\left(f'\right)^2 + 2ff''\right) = 4f'f'' + 2f'f'' + 2ff''' = 6f'f'' + 2ff'''$

$u''(s) = 6f'(s)f''(s)$

y recordando que $v'(s) = 3f'(s)f''(s)$ vemos que $-u''(s) + 2v'(s) = 0$ y por tanto

$$g''(s) = 0 \tag{7}$$

- *¿Te atreves con el tercer apartado?.*