Sobre la geometría de la elipse y la ecuación de Kepler

Justo R. Pérez Cruz

Departamento de Física Fundamental y Exp. Facultad de Física.
Universidad de La Laguna (Material didáctico Métodos Matemáticos VI)

1. La elipse

- La elipse aparece descrita como la curva consecuencia de cortar un cono por un plano, o bien como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos denominados focos es fija.
  En coordenadas cartesianas su ecuación está dada por
  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$
  Los parámetros a y b $(a \geq b > 0)$ se denominan semiejes mayor y menor respectivamente y representan los puntos de corte con los ejes X e Y.
  La suma de las distancias a los dos focos es precisamente 2a.
- Se define la excentricidad de una elipse como el cociente entre la distancia de cada foco al origen c o semi distancia focal y el semieje mayor
  $$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{2}$$
  como $c^2 = a^2 - b^2$ se tiene
  $$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{3}$$
- Si circunscribimos una circunferencia con radio el eje mayor de la elipse (circunferencia principal) las ordenadas de la elipse verifican respecto de las de la circunferencia para el mismo valor de la abcisa x
  $$y_e = \frac{b}{a} y_c \tag{4}$$
  Con esta propiedad es fácil probar que el área de una elipse está dada por
  $$A = \pi ab \tag{5}$$
  ya que corresponde a la de la circunferencia circunscrita πa^2 multiplicada por $\frac{b}{a}$.
- Una forma de parametrizar la elipse es en términos de la anomalía excéntrica, E que corresponde al ángulo formado por el radio vector que une la ordenada sobre la circunferencia principal y el origen de coordenadas y el semieje mayor.
  En términos de la anomalía excéntrica la ecuación paramétrica de la elipse está dada por
  $$x = a \cos E \tag{6}$$

$$y \quad = \quad b \sin E \tag{7}$$

Si consideramos una traslación del origen de coordenadas a uno de los focos (el situado en la parte positiva del eje X) las ecuaciones anteriores se escriben

$$x_f \quad = \quad a \cos E - c = a(\cos E - \varepsilon) \tag{8}$$

$$y_f \quad = \quad b \sin E \tag{9}$$

- De particular interés es la ecuación en coordenadas polares una elipse respecto de uno de los focos la cual está escrita de la forma:

$$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v} \tag{10}$$

donde el ángulo v se denomina anomalía verdadera.

2. La elipse en astronomía. Ecuación de Kepler.

- Desde el punto de vista astronómico la elipse toma relevancia fundamental cuando Kepler establece que los planetas siguen movimientos elípticos con el Sol en uno de sus focos. El punto de la elipse más próximo al foco se denomina afelio y el más alejado se denomina perihelio. Los términos anomalías pretenden describir las desviaciones de los ángulos sobre una órbita circular.
La segunda ley de Kepler establece que el radio vector de un planeta con respecto al Sol barre areas iguales en tiempos iguales, por tanto si un planeta tarda un tiempo T en recorrer la elipse, es decir su periodo orbital es T, al cabo de un tiempo t habrá barrido un área proporcional que vendrá dada por

$$\pi ab\frac{t}{T} \tag{11}$$

- Ahora bien, a cualquier punto sobre la elipse de coordenadas x,y le hacemos corresponder sobre la circunferencia principal un punto de coordenadas $(x, \frac{a}{b}y)$ el área del sector sobre la elipse y la del correspondiente sector sobre la circunferencia con vértice en el foco estarán relacionados de la forma

$$Area(circunferencia) = \frac{a}{b}Area(elipse) \tag{12}$$

por tanto el área del sector de la circunferencia con vértice en el foco será

$$\pi a^2\frac{t}{T} \tag{13}$$

- El área sobre el sector circular de angulo E y vértice el centro de la elipse estará dada por la relación proporcional entre el área del círculo πa^2 y la relación de E a 2π, es decir

$$\pi a^2\frac{E}{2\pi} = a^2\frac{E}{2} \tag{14}$$

- La diferencia entre los sectores sobre la circunferencia con vértice el centro y el foco corresponde a un triángulo de base la semi distancia focal $c = a\varepsilon$ y altura $a \sin E$ por lo que su área es

$$\frac{1}{2}a^2\varepsilon \sin E \tag{15}$$

- Por tanto podemos escribir

$$\frac{1}{2}a^2\varepsilon \sin E = a^2\frac{E}{2} - \pi a^2\frac{t}{T} \tag{16}$$

que puede ser simplificada como

$$E = M + \varepsilon \sin E \tag{17}$$

donde al término

$$M = \frac{2\pi t}{T} \tag{18}$$

se le denomina anomalía media y corresponde al ángulo recorrido por un planeta que siguiera un movimiento circular uniforme de periodo T.

- La ecuación (17) permite obtener el ángulo ν barrido por el planeta con centro en el foco o anomalía verdadera teniendo en cuenta la relación

$$\tan(\frac{\nu}{2}) = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{19}$$

La ecuación (17) debe ser resuelta numéricamente, una forma particularmente eficiente es utilizar el método de iteración de un punto con condicion inicial la anomalía media $E^{(o)} = M$

$$E^{(k+1)} = M + \varepsilon \sin E^{(k)} \tag{20}$$

3. Ejercicio

- i) Analizar la convergencia de la ecuación de Kepler.
- ii) Particularizar al planeta tierra y encontrar la posicion en la que se encuentra actualmente. La Tierra pasó por su perihelio el 4 de Enero. Datos sobre la excentricidad de los planetas y su periodo pueden encontrase en (5]

4. Bibliografía.

[1] http://www.oc.nps.edu/~garfield/ellipse_app2.pdf

[2] http://planetmath.org/encyclopedia/PerimeterOfEllipse.html

[3] http://www.iop.org/EJ/article/1538-3881/116/6/3038/980277.text.html

[4] http://mysite.du.edu/~jcalvert/math/ellipse.htm

[5] http://www.windows.ucar.edu/tour/link=/our_solar_system/planets_orbits_table.sp.html